ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOMVANG SISOUPHET

SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH TRƠN CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI BÀI TOÁN PARABOLIC SUY BIẾN NỬA TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN $L^p(\mathbb{R}^N)$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOMVANG SISOUPHET

SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH TRƠN CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI BÀI TOÁN PARABOLIC SUY BIẾN NỬA TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN $L^p(\mathbb{R}^N)$

Chuyên ngành: Giải Tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Phạm Thị Thủy

THÁI NGUYÊN - 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là luận văn cao học của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào khác.

Tác giả

Somvang Sisouphet

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Thị Thủy. Nhân dịp này em xin cảm ơn Cô về sự hướng dẫn nhiệt tình và sự truyền thụ những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn gia đình cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong được sự góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng……năm 2017

Tác giả luận văn

Somvang Sisouphet

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lí, hóa học và sinh học. Chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt và khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hóa học, các mô hình quần thể trong sinh học… việc nghiên cứu những phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhà khoa học trên thế giới. Các vấn đề đặt ra là nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán (sự tồn tại duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm theo dữ kiện đã cho) và các tính chất định tính của nghiệm (tính trơn, dáng điệu tiệm cận của nghiệm,…).

Sau khi nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng là rất quan trọng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đặt được kết quả mong muốn. Về mặt toán học, điều này làm nảy sinh một hướng nghiên cứu mới, được phát triển mạnh mẽ trong ba thập kỉ gần đây đó là lí thuyết các hệ động lực tiến hoá vô hạn chiều. Lí thuyết này nằm ở giao của 3 chuyên ngành là lý thuyết hệ động lực, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và lý thuyết phương trình vi phân thường. Lí thuyết cơ bản của bài toán này là nghiên cứu sự tồn tại và tính chất cơ bản của tập hút, chẳng hạn đánh giá số chiều fractal hoặc số chiều Hausdorff, sự phụ thuộc liên tục của tập hút theo tham biến, tính trơn của tập hút. Tập hút toàn cục cổ điển là một tập compact, bất biến, hút tất cả các quĩ đạo của hệ và chứa đựng nhiều thông tin về dáng tiệm cận của hệ. Cụ thể với mỗi quĩ đạo cho trước của hệ và một khoảng thời gian T tùy ý, ta đều tìm được một quỹ đạo nằm trên tập hút toàn cục mà dáng điệu khi thời gian đủ lớn của hai qũy đạo này sai khác đủ nhỏ trên một khoảng có độ dài T. Hơn nữa, trong nhiều trường hợp tập hút toàn cục có số chiều fractal hữu hạn và khi đó ta có thể quy việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của một nghiệm bất kì về nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm trên tập hút toàn cục, tức là qui việc nghiên cứu một hệ động lực vô hạn chiều về nghiên cứu hệ động lực hữu hạn chiều trên tập hút toàn cục.

Với những lí do ở trên, chúng tôi lựa chọn đề tài " ***Sự tồn tại và tính trơn của tập hút toàn cục đối với bài toán parabolic suy biến nửa tuyến tính trong không gian*** $L^P(\mathbb{R}^N)$" làm nội dung nghiên cứu**.**

2. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn là trình bày định lý về sự tồn tại và tính trơn của tập hút toàn cục của nửa nhóm sinh bởi bài toán parabolic suy biến nửa tuyến tính trong không gian $L^P(\mathbb{R}^N)$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để chứng minh sự tồn tại tập hút và tính trơn của tập hút, chúng tôi sử dụng các phương pháp của lí thuyết hệ động lực vô hạn chiều, nói riêng là phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 38 trang trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi trình bày các khái niệm về không gian hàm, toán tử được sử dụng trong Chương 2; kết quả tổng quát về tập hút toàn cục, một số kiến thức bổ trợ khác.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. Sự tồn tại và tính trơn của tập hút toàn cục đối với bài toán parabolic suy biến nửa tuyến tính trong không gian $L^P(\mathbb{R}^N)$.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, ta sẽ nhắc lại một số kiến thức quan trọng làm nền tảng để nghiên cứu chương sau. Đó là các kiến thức về không gian hàm, kết quả tổng quát về tập hút toàn cục và một số khái niệm xét tính chất của tập hút toàn cục. Các nội dung trong chương được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [4], [5], [6], [7], [9].

1.1. Một số khái niệm

Định nghĩa 1.1.1. (*không gian metric***)**

Cho X là một tập khác rỗng, trên X ta trang bị một hàm số

$$r : X \times X \to \mathbb{R},$$

$$(x,y) \to r(x,y),$$

thỏa mãn các điều kiện sau

1) $r(x,y) \geq 0 \ \ \forall x,y \in X$; $r(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $r(x,y) = r(y,x) \ \ \forall x,y \in X$;

3) $r(x,z) \leq r(x,y) + r(y,z) \ \ \forall x,y,z \in X$.

Khi đó r được gọi là một metric hay khoảng cách trên X. Cặp (X, r) gọi là không gian metric. Mỗi phần tử của X sẽ được gọi là một điểm, $r(x,y)$ gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y của X.

Ta thường gọi điều kiện 1 là tiên đề đồng nhất, điều kiện 2 là tiên đề đối xứng, điều kiện 3 là tiên đề tam giác.

Ví dụ: Một tập M bất kỳ của đường thẳng $\mathbb{R}$, với khoảng cách thông thường $r(x,y) = |x - y|$ (độ dài đoạn nối x và y), là một không gian metric.

Định nghĩa 1.1.2. (*Không gian metric đầy đủ)* Giả sử (X, r) là một không gian metric. Dãy $\{x_n\}$ các phần tử của X được gọi là một dãy Cauchy (hay dãy cơ bản) nếu

$$\lim_{m,n\to\infty} r(x_m, x_n) = 0.$$

nghĩa là, với mọi $e > 0$, tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}^*$, sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta luôn có

$$r(x_m, x_n) < e.$$

Không gian metric X gọi là không gian metric đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy các phần tử của X đều hội tụ.

Ví dụ: không gian $\mathbb{R}^k$ là đủ: Thật vậy, nếu $\left\{x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^m\right\}$ là một dãy cơ bản trong $\mathbb{R}^k$ thì với mỗi $i = 1,2,\ldots,k,$ dãy số

$\left\{x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^2} = r(x_n, x_m) \to (n,m \to \infty).$ Vậy mỗi dãy số $\left\{x_i^{(n)}\right\}$ có một giới hạn x_i nào đó. Đặt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ta sẽ có $x \in \mathbb{R}^k$ và vì các tọa độ của x_n hội tụ tới các tọa độ tướng ứng của x nên $x_n \to x.$

Định nghĩa 1.1.3. Một tập hợp E gọi là không gian tuyến tính định chuẩn trên trường K (K là trường số thực hoặc phức) nếu:

i.) E là không gian tuyến tính trên trường K

ii.) Mỗi phần tử $u \in E$ đặt tương ứng được với một số thực gọi là chuẩn của u và kí hiệu là $\|u\|$ thỏa mãn các tiên đề:

$$\|u\| \geq 0, \ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\|u+v\| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|l\,u\| = \|l\|\,\|u\|, \ l \in K.$$

Một không gian như vậy sẽ trở thành một không gian metric nếu đưa vào khoảng cách giữa hai phần tử u và v : $r(u,v) = \|u - v\|$.

Sự hội tụ của dãy $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ các phần tử của E tới phần tử $u \in E$ được xác định như sau: $\left\|u_j - u\right\| \to 0$ khi $j \to \infty$, kí hiệu $u_j \to u$.

Định nghĩa 1.1.4. Một tập $E^{'}$ được gọi là trù mật khắp nơi trong E nếu với một phần tử bất kì $u \in E$ tồn tại một dãy $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in E^{'}$, sao cho $u_j \to u$.

Nếu trong E tồn tại một tập hợp đếm được trù mật khắp nơi thì không gian E được gọi là *khả vi*.

Định nghĩa 1.1.5. Nếu đối với mỗi dãy bất kì $\left\{u_j\right\}$ thuộc không gian E, sao cho $\left\|u_p - u_q\right\| \to 0$ khi $p,q \to \infty$, đều hội tụ trong E thì E được gọi là *không gian đầy*.

Định nghĩa 1.1.6. Không gian tuyến tính định chuẩn đầy được gọi là *không gian Banach*.

Định nghĩa 1.1.7. (*Không gian Hilbert)*

Cho không gian vectơ trên trường số $K (K = □$ hoặc $K = \mathrm{C})$. Một ánh xạ từ $X \times X$ vào K, $\left(x,y\right) \to \left\langle y,x \right\rangle$ được gọi là tích vô hướng trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $\left\langle x,x \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$, $\left\langle x,x \right\rangle = 0 \Leftrightarrow x = q$

(b) $\left\langle y,x \right\rangle = \overline{\left\langle x,y \right\rangle}$ $\left(\left\langle y,x \right\rangle = \left\langle x,y \right\rangle \text{ nếu } K = □\right)$, $\forall x,y \in X$,

(c) $\left\langle x + x^{'},y \right\rangle = \left\langle x,y \right\rangle + \left\langle x^{'},y \right\rangle \quad \forall x,x^{'},y \in X$

(d) $\left\langle l\, x,y \right\rangle = l \left\langle x,y \right\rangle \quad \forall x,y \in X, \forall l \in K$

Nếu $\left\langle .,. \right\rangle$ là một tích vô hướng trên X thì ánh xạ $x \to \sqrt{\left\langle x,x \right\rangle}$ là một chuẩn trên X gọi là chuẩn sinh bởi của tích vô hướng.